

《小學數學課程闡釋》「探索與研究」學習單位新增內容

灰色為原有內容

| 學習單位 | 學習重點 | 時間 |
|------------------------|---|------|
| 進階學習單位 | | |
| 4F1, 5F1, 6F1 探索與研究 | 通過不同的探究活動和數學建模學習活動，建構和應用數學知識，進一步提高探索、溝通、思考、形成數學概念和應用數學的能力 | 各 10 |

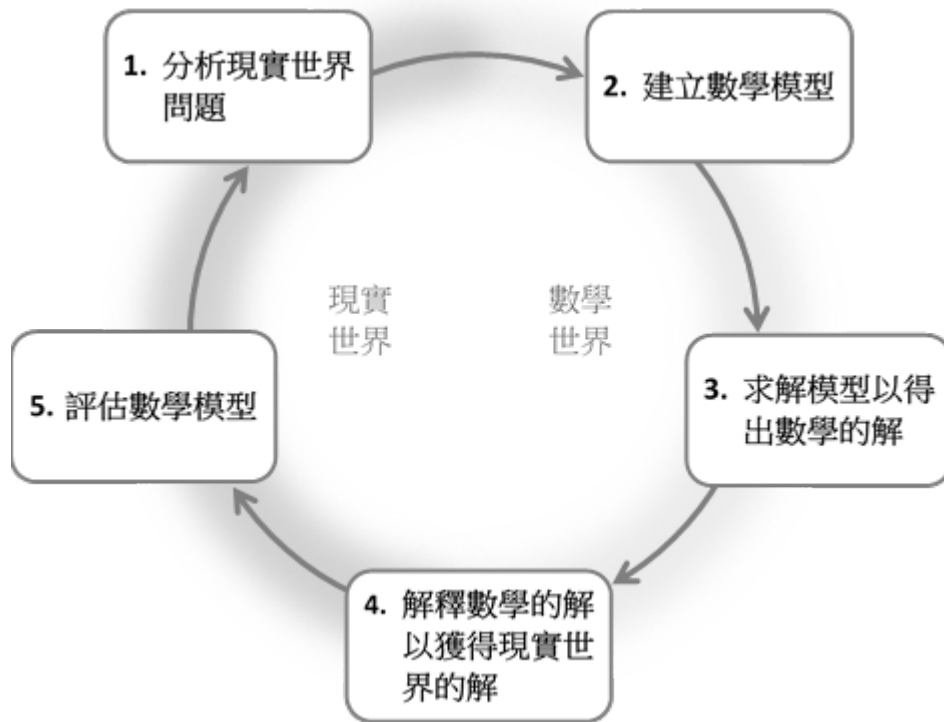
課程闡釋：

本學習單位旨在提供更多學習空間，讓學生在學習其他學習單位的內容時，能參與更多有助發現及建構知識，提高探索、溝通、思考和形成數學概念能力的活動；以及通過數學建模學習活動，提升他們應用數學解決現實世界問題的能力。換句話說，這並非一個獨立和割裂的學習單位，教師可運用建議的課時，讓學生參與不同的學習活動，例如有關增潤課題的活動、跨學習單位的活動、建基於數學課題的跨學習領域活動等，當中教師應為學生規劃每學年約 2-3 小時的數學建模學習活動，讓學生在面對現實世界不同情境的問題時，能以數學思維進行分析與決策，加強他們應用數學解決 STEAM 及其他現實世界問題的能力。教師可善用數學科的課堂、為專題研習或跨學科學習而設的課堂，或其他合適課堂，以及配合其他學時，例如課後、試後活動時段等，進行數學建模學習活動，而數學建模學習活動應被視為數學科的 STEAM 學習活動。

1. 數學建模過程

數學建模是一個運用數學知識和工具解決現實世界問題的過程，強調運用數學方式思考問題和分析數據。教師應引導學生**分析現實世界問題**，釐清問題的關鍵因素和找出相關的資料／數據，以及當中的數學元素，並通過提出假設以簡化問題，以及把問題轉化為數學問題，進而考慮相關的量及變量之間的關係；學生運用已有數學知識和技能**建立數學模型**，並**求解模型**以得出數學的解，再通過**解釋數學的解**在現實世界情境的意義，從而得出現實世界的解。其後可通過驗證和反思以**評估數學模型**，從而提出優化模型的建議。下頁圖一及表一分別為數學建模過程的五個步驟和各步驟的相關元素：

圖一：數學建模過程



表一：數學建模步驟的元素

| 數學建模步驟 | 各步驟的相關元素 |
|--------------------|--|
| 1. 分析現實世界問題 | <ul style="list-style-type: none"> 理解現實世界情境 釐清問題的關鍵因素 識別與問題相關的資料／數據及問題中的數學元素 |
| 2. 建立數學模型 | <ul style="list-style-type: none"> 提出假設以簡化現實世界問題 以數學方式表述問題 確定關鍵量／變量之間的關係 |
| 3. 求解模型以得出數學的解 | <ul style="list-style-type: none"> 應用數學知識、技能，以及不同的工具求解模型 |
| 4. 解釋數學的解以獲得現實世界的解 | <ul style="list-style-type: none"> 考慮數學的解在現實世界問題下的意義 |
| 5. 評估數學模型 | <ul style="list-style-type: none"> 按現實世界情境驗證模型 反思模型的優點和限制 比較不同模型 提出優化模型的建議 |

上頁所示數學建模過程的各個步驟及其元素，旨在為教師提供一般性的建模過程作為參考，以便教師設計數學建模學習活動。教師可根據實際教學情況及學生的能力調整個別步驟或略去當中某些元素，例如若活動中並未產生多個數學模型，步驟 5「評估數學模型」中的元素「比較不同模型」便可省略。

在第二學習階段，數學建模學習活動的重點在於讓學生體驗單次數學建模過程，意識到數學能用於模擬現實世界的情境以解決問題。在此學習階段，學生可以不用在建模後再次進行建模過程以優化模型；教師亦可以只向學生簡單介紹建模步驟，無須讓他們辨認或背誦建模步驟，亦無須讓他們在後設認知層面上了解建模過程，例如按每個建模步驟來解說或反思自己的思考過程。

就小學不同學習階段學習數學建模學習的銜接，學生在第一學習階段可通過處理與生活情境有關的應用題，運用諸如數數、分類、比較等數學方式表達和分析問題，以及在不同範疇的學習，為他們在第二學習階段學習數學建模打好基礎，而教師可以不在第一學習階段為學生安排數學建模學習活動。

配合學生的學習能力，第二學習階段的數學建模學習活動會先聚焦於數學建模過程的首四個步驟，即「分析現實世界問題」、「建立數學模型」、「求解模型以得出數學的解」和「解釋數學的解以獲得現實世界的解」，而步驟 5「評估數學模型」建議可作較簡單的處理。學生將在往後的學習階段更完整和深入地學習數學建模過程。有關各學習階段數學建模的學習，可參考表三「不同學習階段數學建模的學與教要點」。

2. 數學建模學習活動的設計

數學建模學習活動的問題有別於一般數學應用題。數學應用題的情境通常已被簡化，求解過程的所需條件和資料是給定的，且資料完整及剛好足夠，其主要作用是鞏固學生對數學概念的理解和指定技巧的運用。數學建模學習活動的問題一般為未被簡化的現實世界問題，具開放性，沒有指定或明確的求解方法，亦不一定存在唯一或最優解，且問題的相關條件和資料未必是完全給定的。學生需要就問題提出合適的假設，以簡化問題，並蒐集和篩選求解過程所需要的資料／數據，為情境建立相應的數學模型。

學生在本學習階段首次接觸數學建模，教師在設計數學建模學習活動時，應留意以下各項：

- 教師應配合學生數學能力選取學生**熟識**的日常生活情境，諸如購物、出行、學校生活等作為建模題材；
- 教師應就數學建模學習活動**提供**學生所需的**資料／數據**（例如從相關網頁擷取的圖表），並透過密切指導讓學生建立**簡單的數學模型**；
- 數學建模學習活動涉及的數學內容**不須局限於學生就讀年級**，例如教師可為小四學生設計一個涉及三年級學習單位「3M5 重量」的建模活動；
- 教師可按數學建模學習活動的需要，考慮讓學生使用計算機或數學軟件，以減省學生的運算時間；
- 除了設計涵蓋**所有數學建模步驟**的活動，教師亦可在學生認識數學建模的初期，按學生需要設計**聚焦於個別步驟**的學習活動，讓學生逐步認識數學建模的過程，例如設計一個包括首四個步驟的學習活動，當中學生會花較多時間認識及進行首兩個步驟，讓學生建立一些較簡單的數學模型後，簡略地完成餘下兩個步驟；
- 教師可參考其他科目如小學科學科的課程文件，設計**跨學科**的數學建模學習活動，促進學生綜合運用不同學科知識解決問題的能力；
- 教師可按學生的能力和需要，以課堂活動或專題研習等不同形式設計建模活動；
- 教師可因應建模活動的現實情境，在合適的活動中融入**價值觀教育**元素；
- 教師可運用人工智能來協助構思活動、整理數據、預測學生學習難點、製作相關學習資源等，以照顧學習者多樣性，從而提升學生的興趣和參與。教師須謹慎檢視人工智能的輸出，以確保教學質量和學生的學習成效。

3. 數學建模的學與教

在本學習階段，教師應通過仔細的指導和支援，引導學生經歷數學建模的五個步驟，並聚焦首四個步驟。有關數學建模的學與教，教師宜留意以下各項，讓學生經歷及初步學習數學建模過程：

步驟 1：分析現實世界問題

- 教師應提供具體規劃的數學建模學習活動及學生所需的資料，例如讓學生閱讀指定範圍或經整理的資料，以初步理解問題的現實

世界情境；並引導學生思考哪些因素對解決問題更為重要，以及與數學相關，從而引導他們釐清問題中的關鍵因素、相關的資料／數據，以及問題中的數學元素，為建立數學模型作鋪墊；

- 若學生能力較佳，教師可引導他們自行蒐集有助解決問題的資料。

步驟 2：建立數學模型

- 教師應讓學生認識現實世界問題通常複雜，在建立數學模型時，須提出假設以簡化現實世界問題；
- 教師可向學生提供一些假設作為例子，引導學生透過討論自行提出假設，再指導他們運用數學方式表述問題，例如把「可行路線」問題轉化為考慮諸如距離和收費等可測量、比較或計算的關鍵因素的數學問題；
- 教師可透過數式、實物、圖像或表格等形式，讓學生理解和確定關鍵量之間的關係，從而建立數學模型；
- 教師可按問題情境和教學需要，讓學生提出不同的假設，並建立對應的數學模型。

步驟 3：求解模型以得出數學的解

- 教師可按問題情境和數據，引導學生集中討論一個或分組討論不同的數學模型；
- 求解過程應著重培養學生靈活運用已有數學知識和技能，以及適當地使用工具的能力；
- 教師可引導學生運用不同數字工具，例如運用計算機、試算表、繪圖工具等協助求出模型的解，減少學生進行繁複的筆算和繪圖。例如當模型涉及小數混合運算，學生可藉著試算表計算，讓師生更有效運用時間進行討論求解模型的方法。

步驟 4：解釋數學的解以獲得現實世界的解

- 教師應透過提問或討論，引導學生思考模型的解在現實世界問題下的意義，例如現實世界問題是求車輛數量，若模型的解不是整數，便須作出調適，以獲得現實世界的解。

步驟 5：評估數學模型

- 教師應引導學生按現實世界情境驗證模型，例如以模型的結果與實際觀察作比較，並反思模型的優點和限制。若題目合適，教師可進一步引導學生提出優化模型的建議；
- 教師可以不要求學生就所提出的優化建議，建構優化的數學模型。

在學生回應教師提問、進行小組討論或報告討論結果時，教師可鼓勵學生多表達己見，建立開放和理性的討論氛圍，而不應急於給出固定的答案和模型，或數學上較佳的做法，以促進他們慎思明辨和創新的能力。

如需在活動中應用人工智能，教師應先讓學生進行獨立思考，再陪同和引導學生使用人工智能就思考結果提供回饋。教師須讓學生認識人工智能只是輔助他們進行探究和反思，而所生成的內容亦未必正確和適切；學生需要謹慎檢視人工智能的輸出，以及避免讓人工智能取代自己進行思考，培養負責任地使用人工智能的意識。

4. 數學建模的評估

就數學建模的評估，教師宜留意以下各項：

- 教師可通過檢視學生在建模過程的表現及他們的建模成果，評估學生在各個建模步驟的表現，例如從課堂討論、口頭匯報、工作紙等所反映的情況，並訂定合適的評估準則，了解學生在數學建模過程不同步驟的學習成果，從而給予適切的回饋；
- 對於不同的建模活動，教師可通過評估量表就其過程及成果評估學生表現。評估量表可按建模活動所涉及的建模步驟及相關元素設計，並因應學生在各步驟及整體活動的表現給予評價及改善建議。例如在某次小四級的數學建模學習活動，活動旨在讓學生聚焦建模過程的首四個步驟，教師便可對應建模活動的學習目標，設計評估量表（如下頁表二）；
- 教師可在建模活動的不同階段，以口頭或書面進行適時的回饋，亦可以善用同儕互評，讓學生通過評估了解自己的學習表現，從而改善學習。教師亦可參考評估結果，以優化數學建模學習活動的教學。

5. 教學資源

有關數學建模學習活動例子，可參考教育局數學教育組網站的教學資源。

表二：評估量表範例

| 步驟 | 元素* | 評價 / 回饋 |
|--------------------|---|---|
| 1. 分析現實世界問題 | <ul style="list-style-type: none"> - 能理解現實世界情境 - 能釐清問題中的關鍵因素 - 能識別與問題相關的資料／數據及問題中的數學元素 | (教師可在活動不同階段，按建模步驟及相關元素，就學生表現給予評語，亦可給予分數或等級並配以相應描述。) |
| 2. 建立數學模型 | <ul style="list-style-type: none"> - 能提出合適的假設以簡化現實世界問題 - 能運用適切的數學方式表述問題 - 能確定關鍵量／變量之間的關係 | |
| 3. 求解模型以得出數學的解 | <ul style="list-style-type: none"> - 能應用數學知識、技能，以及不同的工具以求解模型 | |
| 4. 解釋數學的解以獲得現實世界的解 | <ul style="list-style-type: none"> - 能考慮數學的解在現實世界問題下的意義 | |
| 整體回饋： | | |

*表中的元素可因應建模活動更具體地表述，例如當活動涉及以電子工具協助計算，表中步驟 3 的元素「能應用數學知識、技能，以及不同的工具以求解模型」可改為諸如「能運用試算表整理不同情況的數據和計算所需數量」

表三：不同學習階段數學建模的學與教要點

| | | 第二學習階段 (小四至小六) | 第三學習階段 (中一至中三) | 第四學習階段 (中四至中六) |
|----|---------------|---|--|---|
| 問題 | 1. 問題的性質和複雜程度 | <ul style="list-style-type: none"> • 建基學生熟悉的日常生活情境 • 提供所需的相關資料／數據 • 引導學生建立一個簡單的模型 | <ul style="list-style-type: none"> • 建基學生熟悉的現實生活情境 • 提供的資料／數據可以是過多或不足 • 要求學生建立一個或多個模型 | <ul style="list-style-type: none"> • 建基學生熟悉的現實生活情境，亦可選取學生不太熟悉的情境 • 提供的資料／數據可以是未經整理或來源分散的 • 要求學生建立多於一個或經優化的模型 |
| 教師 | 2. 教師指導 | <ul style="list-style-type: none"> • 提供結構化的建模活動，並給予學生充足及清晰的指示，以及密切的指導與支援 | <ul style="list-style-type: none"> • 提供充足的指導及支援，亦同時給予足夠空間讓學生自行探究問題 | <ul style="list-style-type: none"> • 在過程中提供適時的指導及支援，以協助學生學習自主地完成數學建模學習活動 |
| 學生 | 3. 學生對建模過程的認識 | <ul style="list-style-type: none"> • 按教師引導體驗建模過程，當中相對地較少強調模型評估的步驟 • 意識到數學能用於模擬現實世界的情境以解決問題，而非在後設認知層面上認識建模過程 | <ul style="list-style-type: none"> • 按教師引導根據數學建模過程的五個步驟認識數學建模過程 | <ul style="list-style-type: none"> • 學習自主地按照數學建模過程的五個步驟進行數學建模學習活動 |

| | | 第二學習階段 (小四至小六) | 第三學習階段 (中一至中三) | 第四學習階段 (中四至中六) |
|----|-----------------------|---|---|--|
| 學生 | 4. 學生建模能力 | <ul style="list-style-type: none"> 提出或認識為簡化現實世界問題而作的假設 將現實世界問題表述為簡單的數學問題，並根據所提供的關鍵量／變量建立相應的模型 提出或認識模型可能存在的優點與限制 | <ul style="list-style-type: none"> 提出合適假設以簡化現實世界問題 將現實世界問題表述為數學問題，並通過識別關鍵量／變量和以數學方式表達其關係，建立相關的數學模型 進行模型評估，例如將模型結果與現實世界數據作比較，以識別模型的優點和限制 提出優化模型的建議 | <ul style="list-style-type: none"> 提出合適假設以簡化現實世界問題，並說明假設的相關性和合理性 將較為複雜的現實世界問題表述為數學問題，並通過數學方式定義、識別和組織關鍵量／變量，建立相關的數學模型 理解模型評估的重要性，並進行模型評估，以識別模型的優點和限制 進行模型優化 |
| | 5. 學生在建模過程中數學知識和工具的應用 | <ul style="list-style-type: none"> 在建模過程中應用初小及高小的數學知識與技能，例如算術運算、面積、百分比、平均數等 使用實物、圖、表和簡單數式等，來表達建模結果 在建模過程中適當地使用計算機和簡易的數字工具等 | <ul style="list-style-type: none"> 在建模過程中應用先備知識及在初中學習的數學知識，例如一元一次方程、二元一次方程、多項式、三角學、概率等 使用圖、表、代數式和圖像等，展示模型結果 在建模過程中適當地使用數字工具，例如試算表、數學繪圖軟件、動態幾何軟件和人工智能工具等 | <ul style="list-style-type: none"> 在建模過程中應用先備知識及在高中學習的數學知識，例如函數及其圖像、變分、立體幾何、概率、求導法*、矩陣*和概率分佈* 使用圖、表、函數和圖像等，展示模型結果 在建模過程中適當地使用數字工具，例如試算表、數學繪圖軟件、動態幾何軟件、微積分計算工具*、矩陣計算工具* 和人工智能工具等 |

*適用於修讀單元一或單元二的學生